

Title	Birkhoff ergodic theorem 卜 Maximal ergodic theorem, II
Author(s)	吉田, 耕作; 角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 181 p.287-p.291
Issue Date	1939-06-28
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74724
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

793. Birkhoff ergodic theorem Maximal ergodic theorem, II

吉田 耕作, 角谷 静夫 (阪大)

I. 前談話カラ $f(x) \in L'$ ナラ バ殆ド全テノ 点 x テ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(T^i \cdot x) = f_1(x)$$

が存在スル。コノ $f_1(x) = \Psi$ イテ

$$(1) \quad f_1(x) \in L'$$

ガ云ヘル。 $f \geq 0$ ノ トキヲ \times レバ 充分デアアル。コノ トキ

$$(2) \quad \begin{cases} \int_S f_1(x) dx \leq \int_S f(x) dx, & = \infty \text{ ノ トキ} \\ \int_S f_1(x) dx = \int_S f(x) dx & = \text{finite} \text{ ノ トキ} \end{cases}$$

ヲ 証明 シヤウ。

(証明) 任意, $0 < \alpha < \beta = \Psi$ イテ

$$\begin{cases} \alpha \text{ mes}(E(\alpha, \beta)) \leq \int_{E(\alpha, \beta)} f(x) dx \leq \beta \text{ mes}(E(\alpha, \beta)) \\ E(\alpha, \beta) = E\{ \alpha < f_1(x) < \beta \} \end{cases}$$

カ 前談話カラ 成立ツ。從ツテ 特 = $\text{mes}(E(\alpha, \beta)) = \text{finite} +$

ル 故 = 積分ノ 定義カラ

$$\int_{E(\alpha, \beta)} f_1(x) dx = \int_{E(\alpha, \beta)} f(x) dx,$$

縦ツテ

$$\int_{E(0,\infty)} f_1(x) dx = \int_{E(0,\infty)} f_1(x) dx = \int_{E(0,\infty)} f(x) dx \leq \int_{E(0,\infty)} f(x) dx$$

$$\text{若し } \varepsilon \text{ mes}(S) = \text{finite} + \varepsilon \int_S f_1(x) dx$$

$$= \int_S f(x) dx \text{ が成立ツ。何者, } f^{(n)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(T^i x) \geq 0$$

$$\text{且ツ } \int_S f^{(n)}(x) dx = \int_S f(x) dx. \quad \text{然し } \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = f_1(x)$$

almost everywhere x カラ $\left\{ \frac{f(x) + \dots + f(T^n x)}{n} \right\}$,
equi-integrability ヲ用ヒ Egoroff, 定理ヲ使
フト直グヲカル。

II. dominated ergodic theorem.

(3) $f \geq 0$ が $L^1 = \in L^p (p > 1) = \in$ 属スルトス
ルト

$$f^*(x) = \text{l.u.b.}_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(T^i x) \in L^p$$

(4) $f \geq 0$ が $L^1 = \in$ Zygmund class $= \in$
属スルトスル⁽¹⁾

$$\text{然ラバ } f^*(x) \in L^1$$

(1) Zygmund class = 属スルト云フハ

$$\int f(x) \log^+ f(x) dx < \infty \text{ ナルコト。}$$

証. $\mathbb{E}_x \{ f^*(x) > \alpha \} + \nu \text{ set} \Rightarrow M^*(\alpha)$ ト置クト前
 談話カラ

$$(5) \int_{M^*(\alpha)} f(x) dx \geq \alpha M^*(\alpha).$$

今

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{if } f(x) > \frac{\alpha}{2} \\ = 0 & \text{if } f(x) \leq \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

ト置ケバ

$$f^*(x) \leq h^*(x) + \frac{\alpha}{2}$$

從ツテ (5) カラ

$$\begin{cases} \text{mes } \mathbb{E}_x \{ f^*(x) > \alpha \} \leq \text{mes } \mathbb{E}_x \{ h^*(x) > \frac{\alpha}{2} \} \\ \leq \frac{2}{\alpha} \int_{h^*(x) > \frac{\alpha}{2}} h(x) dx \leq \frac{2}{\alpha} \int_{f(x) > \frac{\alpha}{2}} f(x) dx \\ = \frac{2}{\alpha} \int_{f(x) > \frac{\alpha}{2}} f(x) dx \end{cases}$$

即チ $M(\alpha) = \mathbb{E}_x \{ f(x) > \alpha \}$ トヲイテ

$$(6) \quad \alpha M^*(\alpha) \leq 2 \int_{f(x) > \frac{\alpha}{2}} f(x) dx = -2 \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\infty} y dM(y).$$

從ツテ 形式的 $\nu > 0$ トシテ

$$\int_0^{\infty} M^*(x) x^{\nu} dx \leq -2 \int_0^{\infty} x^{\nu-1} dx \left\{ \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} y dM(y) \right\}$$

$$= -2^{\nu+1} \int_0^{\infty} x^{\nu-1} dx \left\{ \int_x^{\infty} y dM(y) \right\}$$

$$= -2^{\nu+1} \int_0^{\infty} y dM(y) \left\{ \int_0^y x^{\nu-1} dx \right\}$$

$$= -\frac{2^{\nu+1}}{\nu} \int_0^{\infty} y^{\nu+1} dM(y)$$

$$\text{故} = \int f(x)^p dx = -\int_0^{\infty} y^p dM(y) = \text{finite} (p > 1) + \infty$$

$$(7) \int_0^{\infty} M^*(x) x^{p-1} dx = \text{finite}$$

部分積分デハ

$$\int_{\eta}^{\xi} M^*(x) x^{p-1} dx = \left[\frac{x^p}{p} M^*(x) \right]_{\eta}^{\xi} - \int_{\eta}^{\xi} \frac{x^p}{p} dM^*(x)$$

$$\text{故} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^p M^*(\eta) = 0 \text{ 且 } \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^p M^*(\xi) = \text{exist} \text{ トス}$$

$$\text{レハ } -\int_0^{\infty} x^p dM^*(x) = \int \left\{ f^*(x) \right\}^p dx \text{ exist スル。所}$$

カ $M^*(x)$ 單調減少カラ (7) = ヨリ

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} M^*(x) x^{p-1} dx \geq M^*(\xi) \int_{\frac{\xi}{2}}^{\xi} x^{p-1} dx = \frac{\xi^p}{p} M^*(\xi) \left\{ 1 - \frac{1}{2^p} \right\}$$

ヲ得ル。此、左辺ハ $\xi \rightarrow +\infty$ ノトキ $\rightarrow 0$ 。又同ジク

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^p M^*(\eta) = 0 \text{ ヲ得ルカラ結局}$$

$$f^*(x) \in L^p.$$

次 = 上ト同様 = 形式的 + 方法デ

$$\int_1^{\infty} M^*(x) dx \leq -\text{const} \int_1^{\infty} y dM(y) \int_1^y \frac{dx}{x}$$

$$= -\text{const} \int_1^{\infty} y \log y \, dM(y)$$

を得るから $\text{mes}(S) = \text{finite}$ かつ $f \in L^1$ 且つ

$f \in \text{Zygmund class}$ かつ $-\int_1^{\infty} x \, dM^*(x) = \text{finite}$

即ち $f^*(x) \in L^1$ を得る。